PLANETES ET SATELLITES

LOIS DE KEPLER

GRAVITATION

Prof-TC

www.prof-tc.fr

- 1 -

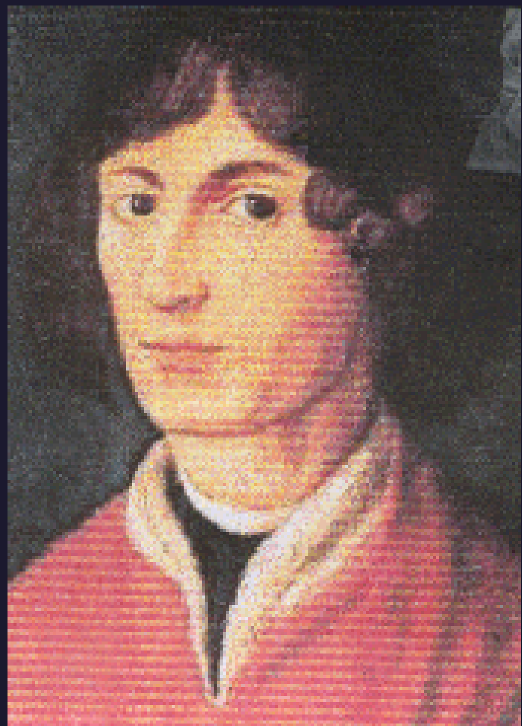
Historique

Claude Ptolémée

Pendant tout le Moyen Age, appliquant le système du savant grec Claude Ptolémée (2ème siècle), on pense que la Terre est le centre du monde et que les astres tournent autour d'elle.

Nicolas Copernic

Nicolas Copernic, savant Polonais, montre que la Terre, comme les autres planètes, tourne sur elle-même et autour du Soleil (Traité sur les révolutions du monde céleste, 1543).



Tycho Brahé

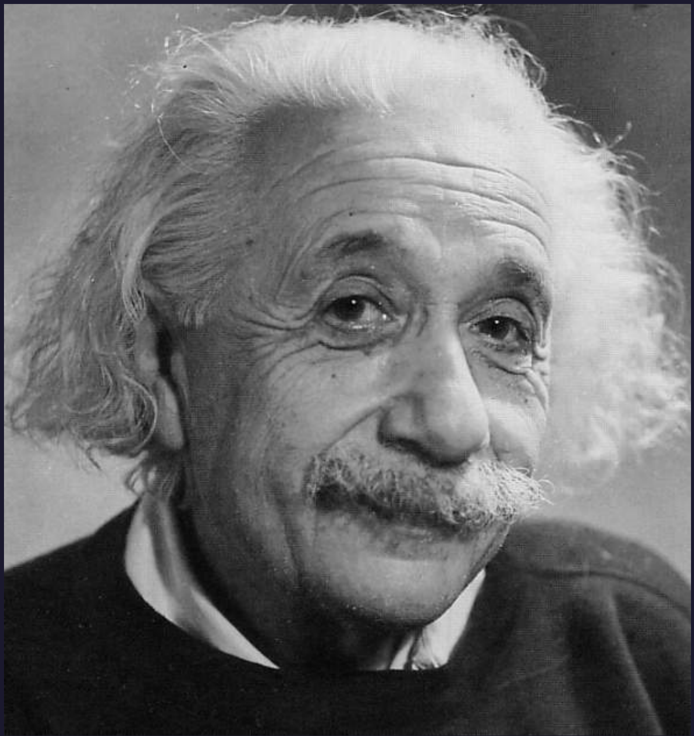
Johannes Képler, savant allemand, exploite les mesures de son maître danois Tycho Brahé et énonce les trois lois qui régissent le mouvement des planètes autour du Soleil (La nouvelle astronomie, 1609).

Isaac Newton

C'est le savant anglais Isaac Newton (Sir) qui énonce la loi de gravitation universelle, permettant d'expliquer de nombreux mouvements célestes (Principes mathématiques de philosophie naturelle, 1686).

Albert Einstein – Stephen Hawking

Certains phénomènes de la mécanique céleste seront expliqués par la mécanique relativiste d'Einstein au 20ème siècle. De nos jours, Stephen Hawking a apporté une grande contribution dans les domaines de la cosmologie et de la gravité quantique, en particulier dans le cadre des trous noirs.

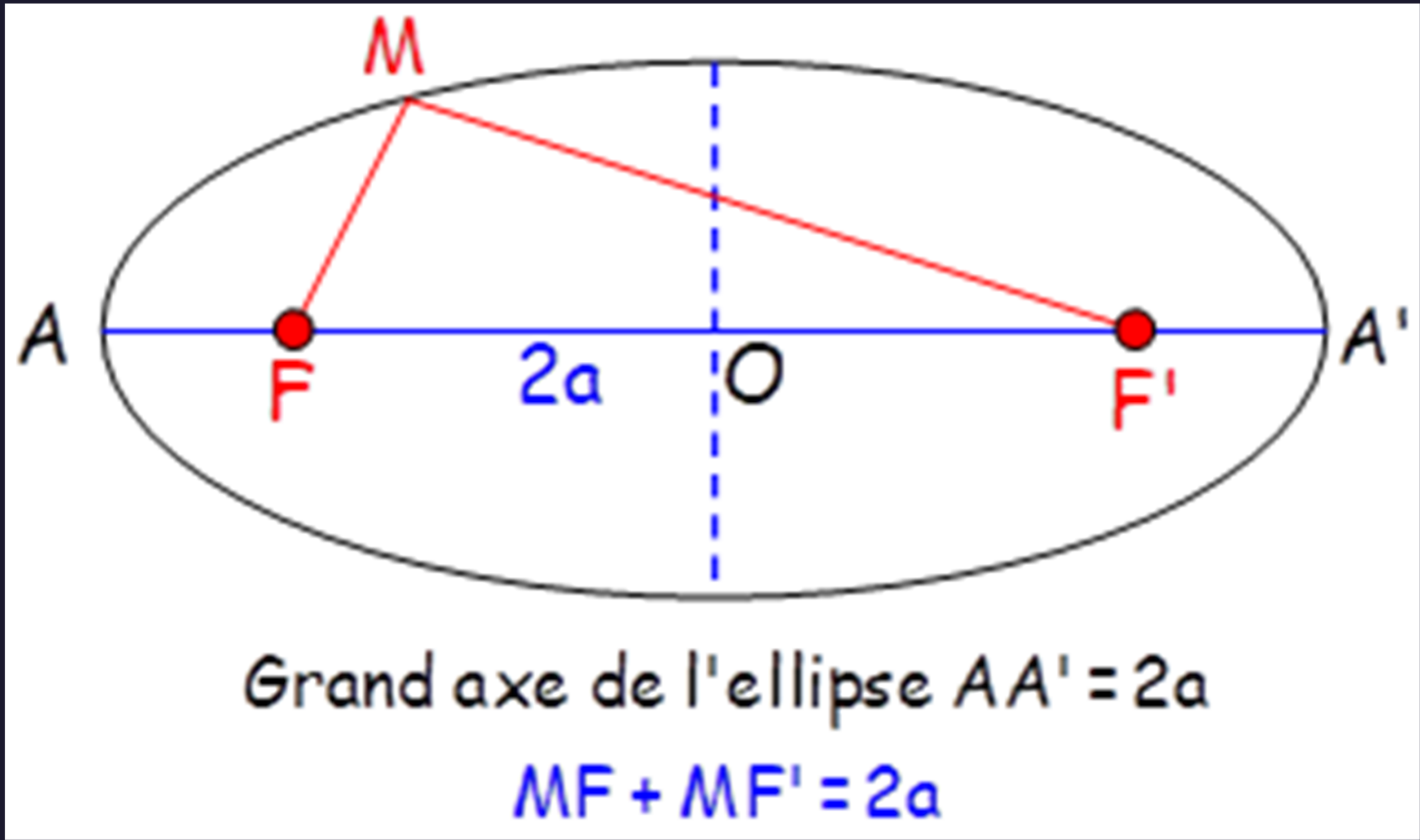


- 2 -

Les trois lois de Kepler

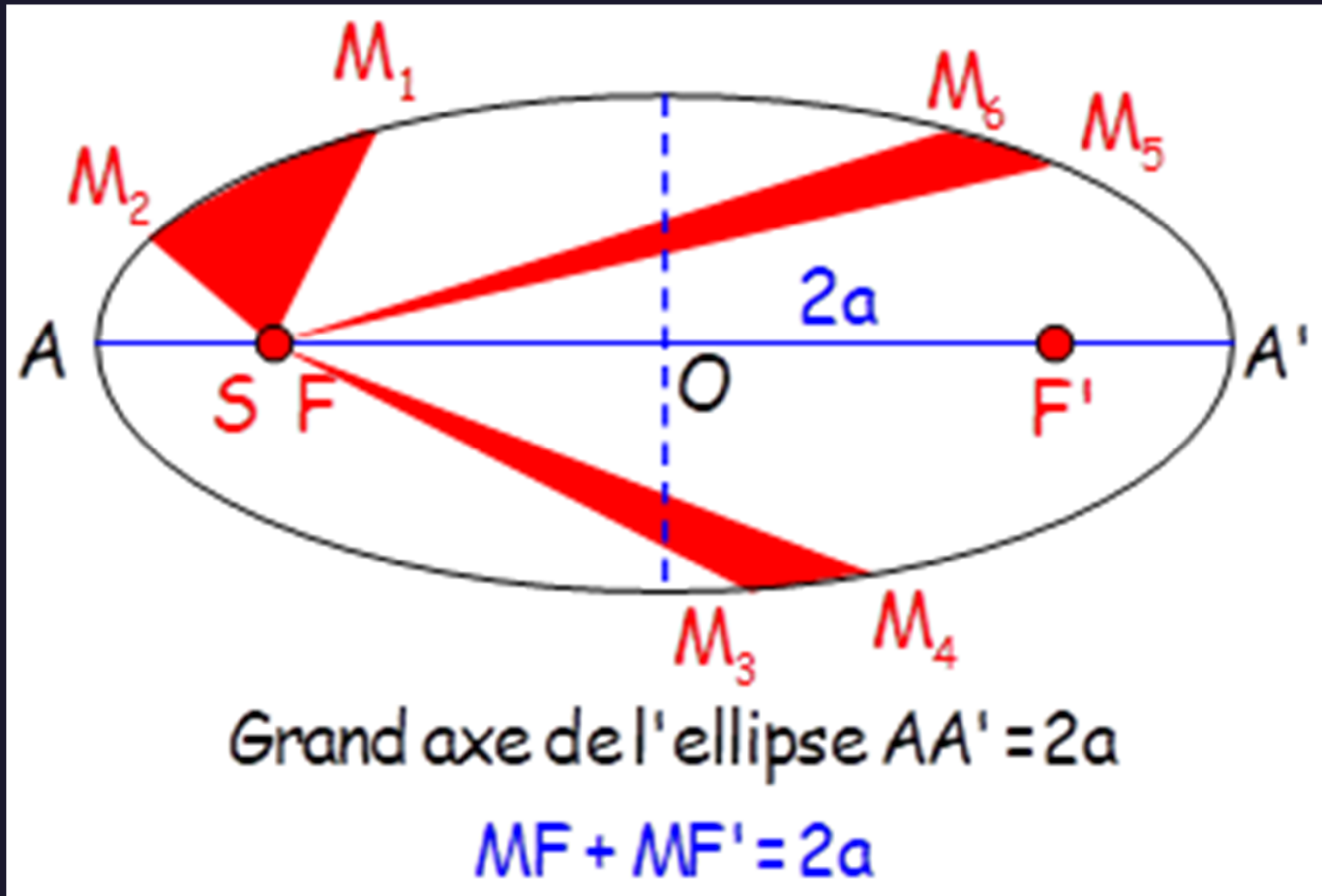
Première loi de Kepler – Loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, le centre de chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil S est l'un des foyers.



Deuxième loi de Kepler – Loi des aires

Dans le référentiel héliocentrique, le segment de droite qui relie les centres du Soleil S et de la planète M "balaie" des aires égales pendant des durées égales.

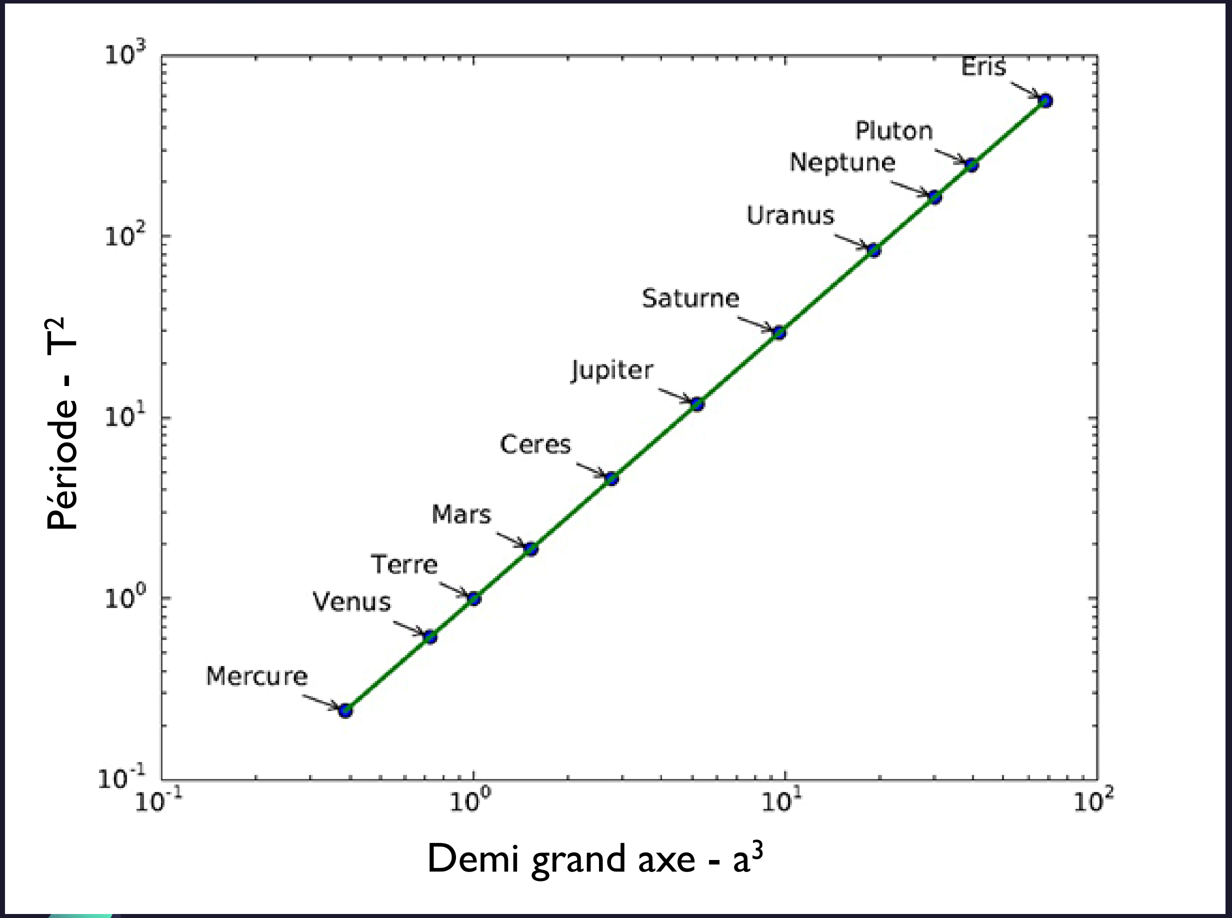


Troisième loi de Kepler – Loi des périodes

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique est constant:

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

La valeur de la constante K ne dépend que de la masse du Soleil.



Quelques remarques

Dans un souci de simplification on considèrera les trajectoires comme étant circulaires et non elliptiques.

Les trois lois de Képler sont également valables pour les satellites de la Terre dans le référentiel géocentrique. La constante K' ne dépend alors que de la masse de la Terre.

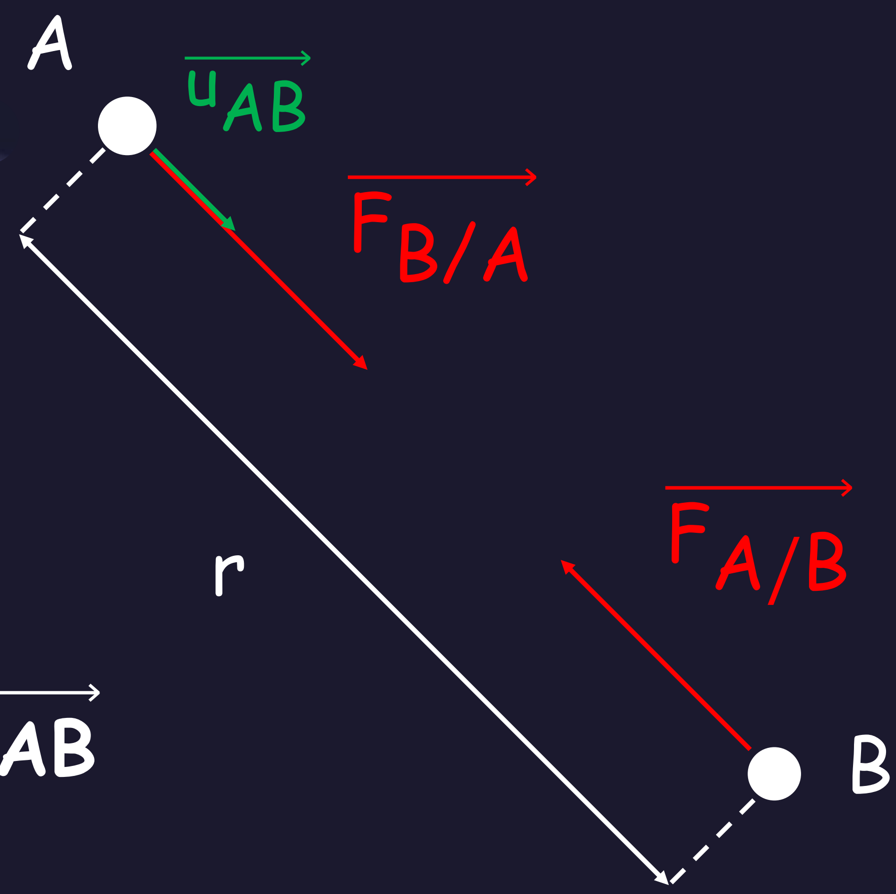
Les trois lois de Képler sont valables pour tous les objets de l'univers dont tournant autour d'un objet central.

- 3 -

Loi de gravitation universelle

Deux objets ponctuels A et B de masse M_A et M_B, exercent l'un sur l'autre une force attractive, dirigée suivant la droite qui les joint.

Cette force varie proportionnellement au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare.



$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -G.\frac{M_A.M_B}{r^2}.\overrightarrow{u_{AB}}$$

$\overrightarrow{u_{AB}}$: Vecteur unitaire dirigé de A vers B

r : Distance entre A et B

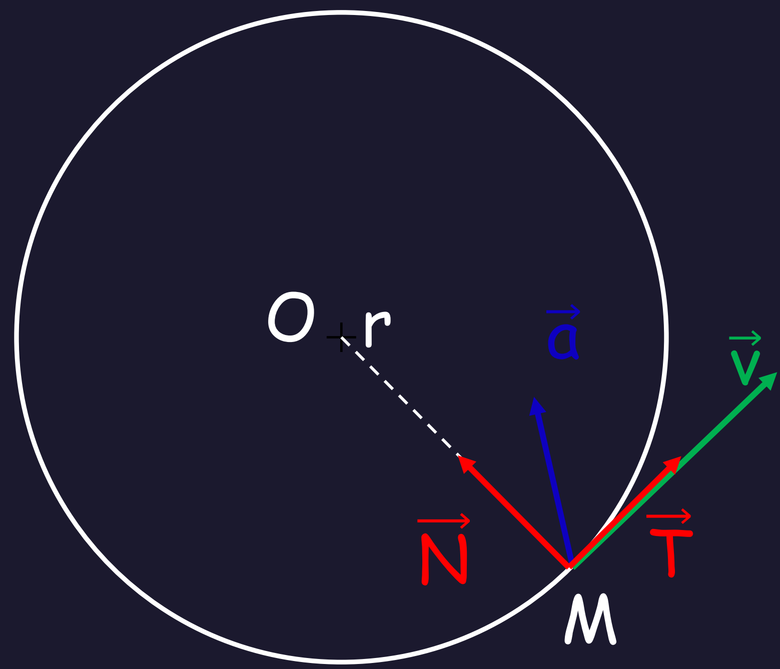
G : Constante de gravitation ($G=6,67.10^{-11}$ s.i.)

- 4 -

Mouvement circulaire d'un mobile ponctuel

Lors d'un mouvement circulaire, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire.

$$\vec{v} = v.\overrightarrow{T}$$



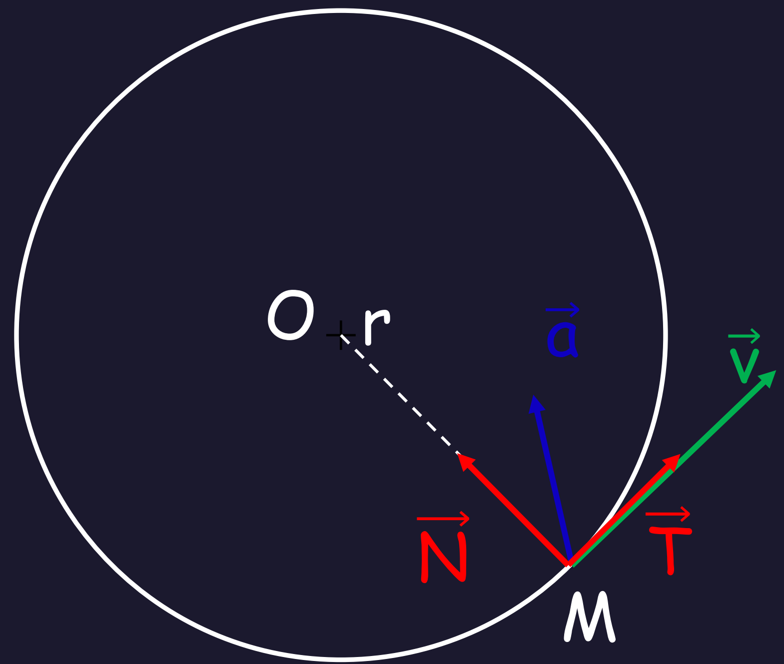
Le vecteur accélération $\vec{a}$, qui est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire, a une composante normale et une composante tangentielle, d'où la relation:

$$\vec{a} = a_T.\overrightarrow{T} + a_N.\overrightarrow{N}$$

La composante tangentielle a_T de l'accélération, qui peut être positive ou nulle, fait varier la valeur de la vitesse.

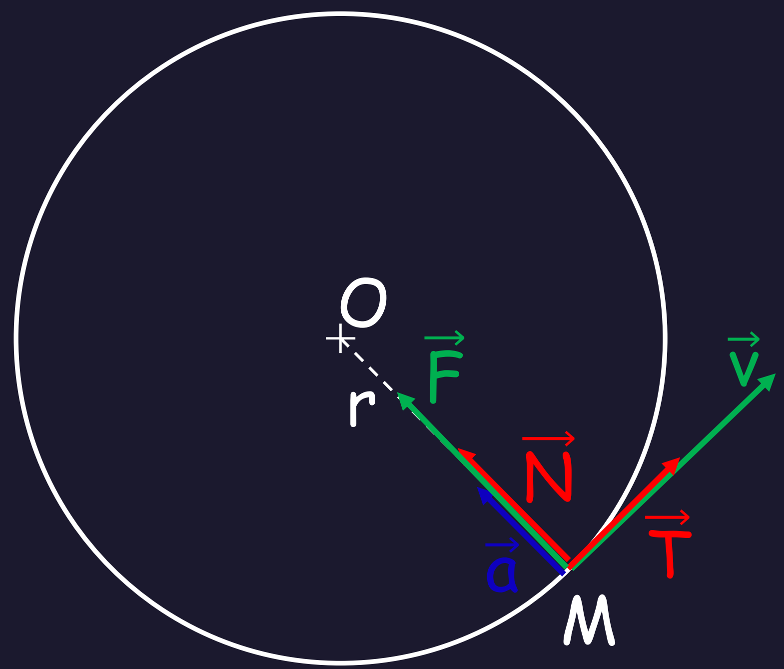
La composante normale a_N de l'accélération, qui est positive, modifie la direction de la vitesse.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{T} + \frac{v^2}{r}.\vec{N}$$



- 5 -
Mouvement circulaire uniforme d'un mobile ponctuel

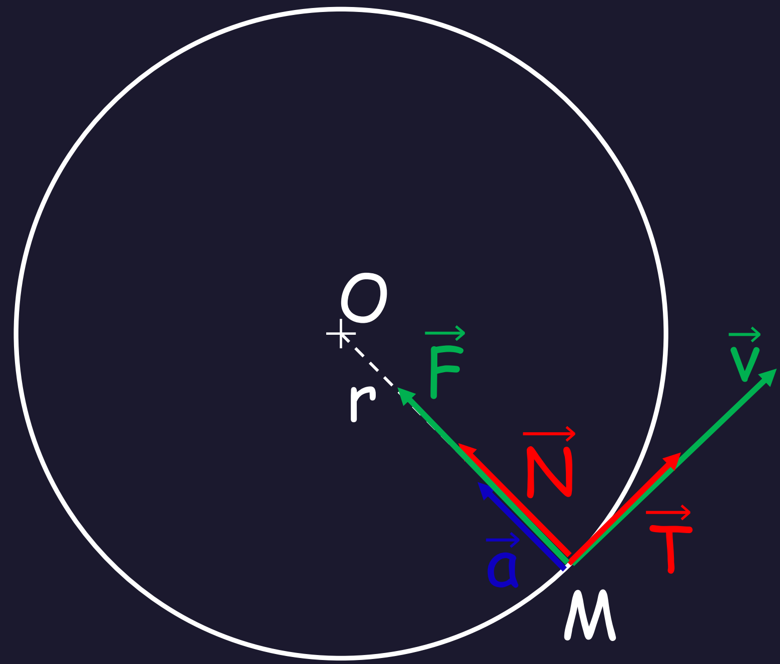
Si le mobile M ponctuel est animé d'un mouvement circulaire uniforme alors sa vitesse V est constante, seule la direction du vecteur vitesse varie, donc le vecteur vitesse $\vec{V}$ est toujours tangent à la trajectoire.



L'accélération tangentielle $a_T = \frac{dv}{dt}$ est nulle, tandis que la valeur $a_N = \frac{v^2}{r}$ de l'accélération normale qui n'est pas nulle, traduit la variation de la direction du vecteur vitesse.

Si un point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme, alors:

- Le vecteur vitesse $\vec{v} = v.\vec{T}$ est tangent au cercle.
- Le vecteur accélération $\vec{a} = a_N.\vec{N} = \frac{v^2}{r}.\vec{N}$ est centripète.

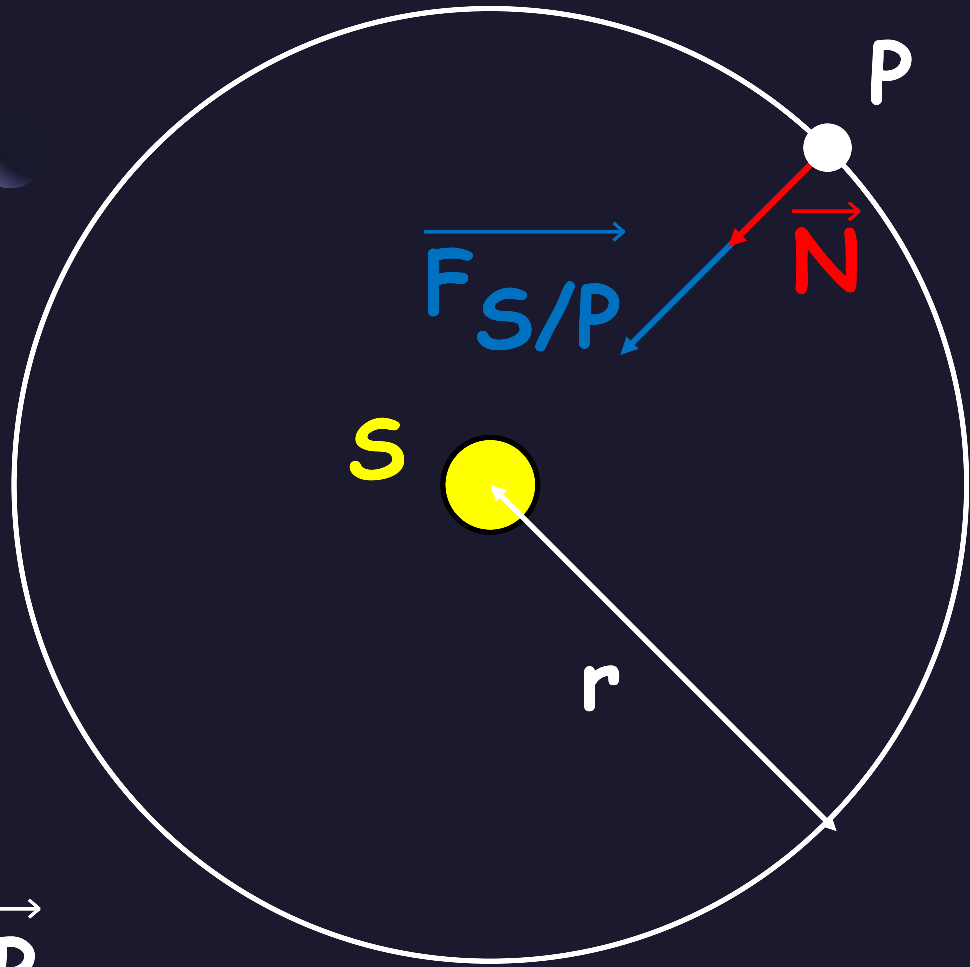


On dit que le mobile ponctuel M est soumis à une force centrale $\vec{F}$ (radiale), constamment orientée vers le centre O.

- 6 -
Application de la deuxième loi de Newton

On applique, dans le référentiel héliocentrique galiléen, la seconde loi de Newton à une planète P du système solaire de masse M_p, soumise à la force d'attraction gravitationnelle radiale exercée par le soleil S de masse M_S:

$$\overrightarrow{F_{S/P}} = G.\frac{M_S.M_P}{r^2}.\overrightarrow{N} = M_P.\overrightarrow{a_P}$$



On en déduit l'expression du vecteur accélération:

$$\overrightarrow{a_P} = G.\frac{M_S}{r^2}.\overrightarrow{N}$$

La valeur a_P de ce vecteur accélération ne dépend que de la masse M_S du soleil et du rayon r de l'orbite de la planète.

Dans le référentiel héliocentrique, le mouvement circulaire et uniforme d'une planète P est une solution de la seconde loi de Newton.

- 7 -
Expression de la vitesse du mouvement

Pour un mouvement circulaire de rayon r et uniforme de vitesse V, le vecteur accélération s'écrit:

$$\overrightarrow{a_P} = G.\frac{M_S}{r^2}.\overrightarrow{N} = \frac{v^2}{r}.\overrightarrow{N}$$

Dans le référentiel héliocentrique, la valeur constante de la vitesse V d'une planète en mouvement circulaire de rayon r autour du soleil est:

$$v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$$

On a pour les différentes planètes du système solaire les valeurs données dans le tableau suivant avec M_S=1,98.10^{30}kg.

Planètes	Rayon de l'orbite r (x 10^6km)	Vitesse moyenne V (km/s)
Mercure	57,9	47,8
Vénus	108,3	34,9
Terre	149,6	29,7
Mars	227,9	24,1
Jupiter	778,3	13,0
Saturne	1427,7	9,6
Uranus	2869,6	6,8
Neptune	4496,7	5,4

On veut calculer la vitesse orbitale de la Lune.

Données

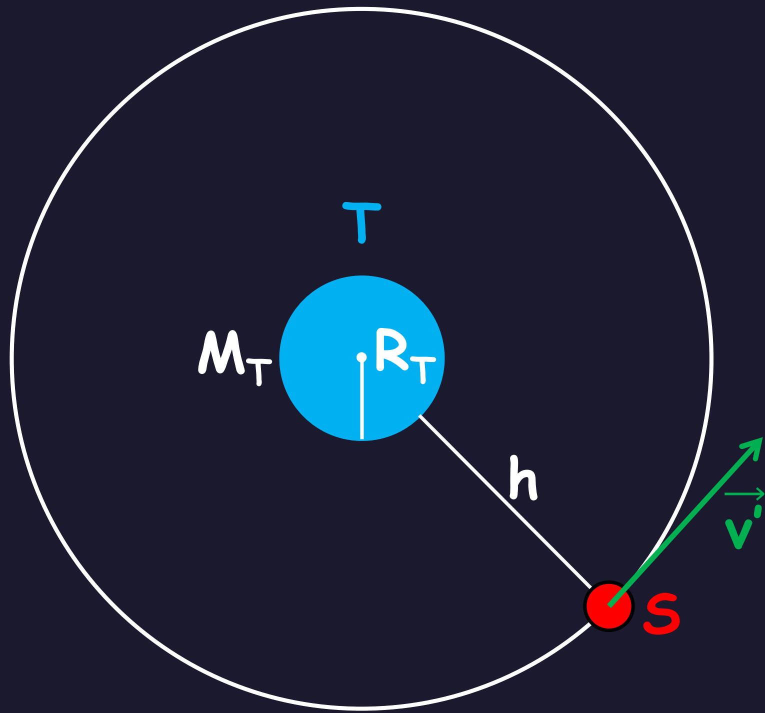
$r=384000km$, $M_S=1{,}98.10^{30}kg$, $M_T=5{,}98.10^{24}kg$

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}{3{,}84.10^{8}}}$$

$$v = 1{,}02km.s^{-1}$$

Un satellite S en orbite autour de la Terre T, à une altitude h par rapport au sol, aura une vitesse:

$$v' = \sqrt{\frac{G.M_T}{R_T+h}}$$



Pour l'ISS évoluant à une altitude h=350km on aura:

$$v' = \sqrt{\frac{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}{6{,}4.10^{6}+350.10^{3}}} = 7687 m.s^{-1} \sim 7{,}7 km.s^{-1}$$

- 8 -
Expression de la période de révolution

Pendant une période T, la planète parcourt une distance $2.\pi.r$, correspondant à la circonférence d'une révolution, à une vitesse v telle que:

$$v = \frac{2.\pi.r}{T} = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$$

La période de révolution T d'une planète du système solaire d'orbite de rayon r est donc donnée par la relation:

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$$

Pour un satellite artificiel terrestre on aura:

$$T' = 2.\pi.\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G.M_T}}$$

Pour un satellite géostationnaire évoluant à l'altitude de 36000km, on aura:

$$T' = 2.\pi.\sqrt{\frac{(3,6.10^7 + 6,4.10^6)^3}{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}} = 8,7.10^4 s = 24h$$

- 9 -
Retour sur la troisième loi de Kepler

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du rayon r de l'orbite circulaire est constant:

$$K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

Voici un tableau que Kepler aurait pu faire pour consigner les résultats des observations de Tycho Brahé et de ses calculs, pour les planètes du système solaire.

Planète	Demi grand axe a ($\times 10^6$ km)	Période de révolution T (jour)	Période de révolution T ($\times 10^6$ s)	T^2/a^3 ($jour^2.km^{-3}$)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Mercure	57,9	88,0	7,6	$3,98.10^{-11}$	$2,96.10^{-19}$
Vénus	108,2	224,7	19,4	$3,98.10^{-11}$	$2,96.10^{-19}$
Terre	149,6	365,3	31,5	$3,98.10^{-11}$	$2,96.10^{-19}$
Mars	227,9	687,0	59,2	$3,98.10^{-11}$	$2,96.10^{-19}$
Jupiter	778,3	4332,7	373,3	$3,98.10^{-11}$	$2,96.10^{-19}$

Une démarche analogue nous donne pour les satellites de Jupiter observés par Galilée le tableau suivant:

Satellite	Demi grand axe a ($\times 10^3$ km)	Période de révolution T (jour)	Période de révolution T ($\times 10^6$ s)	T^2/a^3 ($jour^2.km^{-3}$)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Io	422	1,77	0,15	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Europe	671	3,55	0,31	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Ganymède	1070	7,15	0,62	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Callisto	1883	16,69	1,44	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$

La même démarche nous donne pour quelques satellites de la Terre le tableau suivant:

Satellite	Demi grand axe a ($\times 10^3$km)	Période de révolution T	Période de révolution T ($\times 10^6$s)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Lune	384	27,32 jours	2 350 000	$9,78.10^{-14}$
Hipparcos	24,5	10h37min57s	38277	$9,91.10^{-14}$
NOAA 15	7,2	1h41min09s	6069	$9,91.10^{-14}$
GPS BII-01	26,6	11h58min08s	43088	$9,91.10^{-14}$
Globalstar MO48	7,8	1h54min4s	6844	$9,91.10^{-14}$

La constante obtenue avec la Lune est légèrement différente. Newton a déjà corrigé la troisième loi de Kepler en montrant que la masse qui intervenait était en fait la somme des masses des deux corps en interaction gravitationnelle (ici la Terre et la Lune).

En se servant de la correction de Newton on trouve $M_{Terre+Lune}=6{,}05.10^{24}$kg et par différence la masse de la Lune est $M_L=7{,}36.10^{22}$kg.

La troisième loi n'est qu'approchée et les bons résultats obtenus par Kepler sont dus au fait que la masse des planètes est négligeable devant celle du Soleil.

PLANETES ET SATELLITES

LOIS DE KEPLER

GRAVITATION

Prof-TC

www.prof-tc.fr